Úvod do predikátové logiky

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Neuspořádaná vs. uspořádaná dvojice

$\{m, n\}$ je neuspořádaná dvojice.
$\langle m, n \rangle$ je uspořádaná dvojice.

Kartézský součin

$$M \times N = \{\langle m, n\rangle \,;\, m \in M, n \in N\}.$$

Binární relace

Definice

Binární relace na množině M je podmnožina kartézského součinu $M \times M$.

Klasifikace relací

- R je reflexivní, když pro každé m platí mRm.
- R je symetrická, když pro každé m, n platí, že pokud mRn, pak nRm.
- R je tranzitivní, když pro každé m, n, o platí, že pokud mRn a nRo, pak mRo.
- R je relace ekvivalence, když je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Klasifikace relací

- R je antisymetrická, když pro každé m, n platí, že pokud mRn, pak neplatí nRm.
- R je ostré uspořádání, když R je tranzitivní a antisymetrická.

Klasifikace relací

- R je slabě antisymetrická, když pro každé m, n platí, že pokud mRn a nRm, pak $n = m$.
- R je neostré uspořádání, když R je reflexivní, tranzitivní a slabě antisymetrická.

Klasifikace relací

- R je funkce, když pro každé m, n, o platí, že pokud mRn a mRo, pak $n = o$.

Základní symboly predikátové logiky

Základní symboly predikátové logiky:

Mimologické symboly

- predikáty: $A^m, B^m, C^m, \ldots$
- jména: $a, b, c, \ldots$

Logické symboly

- výrokové operátory: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- kvantifikátory: $\forall, \exists$

Proměnné: $x, y, z, \ldots$

Pomocné symboly: (,)

Základní symboly predikátové logiky

Základní symboly predikátové logiky:

Mimologické symboly

- predikáty: $A^m, B^m, C^m, \ldots$
- jména: $a, b, c, \ldots$

Logické symboly

- výrokové operátory: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- kvantifikátory: $\forall, \exists$

Proměnné: $x, y, z, \ldots$

Pomocné symboly: (,)

Základní symboly predikátové logiky

Základní symboly predikátové logiky:

Mimologické symboly

- predikáty: $A^m, B^m, C^m, \ldots$
- jména: $a, b, c, \ldots$

Logické symboly

- výrokové operátory: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- kvantifikátory: $\forall, \exists$

Proměnné: $x, y, z, \ldots$

Pomocné symboly: (,)

Základní symboly predikátové logiky

Základní symboly predikátové logiky:

Mimologické symboly

- predikáty: $A^m, B^m, C^m, \ldots$
- jména: $a, b, c, \ldots$

Logické symboly

- výrokové operátory: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- kvantifikátory: $\forall, \exists$

Proměnné: $x, y, z, \ldots$

Pomocné symboly: (,)

Základní symboly predikátové logiky

Základní symboly predikátové logiky:

Mimologické symboly

- predikáty: $A^m, B^m, C^m, \ldots$
- jména: $a, b, c, \ldots$

Logické symboly

- výrokové operátory: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- kvantifikátory: $\forall, \exists$

Proměnné: $x, y, z, \ldots$

Pomocné symboly: (,)

Termy

Proměnné a jména jsou **termy**.

Gramatika: Elementární formule

Pokud A je n-místný predikát a $t_1, \ldots, t_n$ jsou termy, pak $At_1, \ldots, t_n$ je elementární formule.

Gramatika: Induktivní definice formule KPL

Definice

- *Každá elementární formule je formule.*
- *Jestliže φ je formule, pak $\neg\varphi$ je také formule. Pokud φ, ψ jsou formule, pak $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi)$ a $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ jsou také formule.*
- *Jestliže φ je formule a x proměnná, pak $\forall x\varphi$ a $\exists x\varphi$ jsou formule.*

Gramatika: Induktivní definice formule KPL

Definice

- *Každá elementární formule je formule.*
- *Jestliže φ je formule, pak $\neg\varphi$ je také formule. Pokud φ, ψ jsou formule, pak $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi)$ a $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ jsou také formule.*
- *Jestliže φ je formule a x proměnná, pak $\forall x\varphi$ a $\exists x\varphi$ jsou formule.*

Gramatika: Induktivní definice formule KPL

Definice

- *Každá elementární formule je formule.*
- *Jestliže φ je formule, pak $\neg\varphi$ je také formule. Pokud φ, ψ jsou formule, pak $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi)$ a $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ jsou také formule.*
- *Jestliže φ je formule a x proměnná, pak $\forall x\varphi$ a $\exists x\varphi$ jsou formule.*

Gramatika: Induktivní definice formule KPL

Definice

- *Každá elementární formule je formule.*
- *Jestliže* φ *je formule, pak* $\neg\varphi$ *je také formule. Pokud* φ, ψ *jsou formule, pak* $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi)$ *a* $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ *jsou také formule.*
- *Jestliže* φ *je formule a x proměnná, pak* $\forall x\varphi$ *a* $\exists x\varphi$ *jsou formule.*

Základní syntaktické pojmy

- konstrukce formule
- rozsah kvantifikátoru
- volné a vázané výskyty proměnných
- otevřené formule a uzavřené formule (*sentence*)

Formalizace: Sylogistické formule

- SaP ... $\forall x(Sx \rightarrow Px)$
- SeP ... $\forall x(Sx \rightarrow \neg Px)$
- SiP ... $\exists x(Sx \wedge Px)$
- SoP ... $\exists x(Sx \wedge \neg Px)$

$\forall \rightarrow$, $\exists \wedge$

Obecný kvantifikátor se přirozeně váže k implikaci:

$\forall x(\ldots \rightarrow \ldots)$

Existenční kvantifikátor se přirozeně váže ke konjunkci:

$\exists x(\ldots \wedge \ldots)$

Cvičení: formalizujte následující věty

- Psi, kteří štěkají, nekoušou.
- Všichni lidé, kteří se něčeho bojí, jsou zbabělci.
- Někteří savci, kteří žijí ve vodě, nesnáší žraloky.

Cvičení: formalizujte následující věty

- Pokud někdo lže, tak i krade.
- Je k dispozici pokoj s výhledem.
- Není všechno zlato, co se třpytí.
- Pomeranče a citróny jsou citrusové plody.
- Jen hadům a ještěrkám se dobře daří v poušti.
- Petr má krásnou ženu, ona ho však nenávidí.
- Kdo jinému jámu kopá, sám do ní padá.
- Lidé se dělí na pracovité a líné.
- Tom se nepohodl se svým bratrem a syn ho pak našel mrtvého.

Cvičení: formalizujte následující věty

- Pokud někdo lže, tak i krade.
- Je k dispozici pokoj s výhledem.
- Není všechno zlato, co se třpytí.
- Pomeranče a citróny jsou citrusové plody.
- Jen hadům a ještěrkám se dobře daří v poušti.
- Petr má krásnou ženu, ona ho však nenávidí.
- Kdo jinému jámu kopá, sám do ní padá.
- Lidé se dělí na pracovité a líné.
- Tom se nepohodl se svým bratrem a syn ho pak našel mrtvého.

Cvičení: formalizujte následující věty

- Pokud někdo lže, tak i krade.
- Je k dispozici pokoj s výhledem.
- Není všechno zlato, co se třpytí.
- Pomeranče a citróny jsou citrusové plody.
- Jen hadům a ještěrkám se dobře daří v poušti.
- Petr má krásnou ženu, ona ho však nenávidí.
- Kdo jinému jámu kopá, sám do ní padá.
- Lidé se dělí na pracovité a líné.
- Tom se nepohodl se svým bratrem a syn ho pak našel mrtvého.

Cvičení: formalizujte následující věty

- Pokud někdo lže, tak i krade.
- Je k dispozici pokoj s výhledem.
- Není všechno zlato, co se třpytí.
- Pomeranče a citróny jsou citrusové plody.
- Jen hadům a ještěrkám se dobře daří v poušti.
- Petr má krásnou ženu, ona ho však nenávidí.
- Kdo jinému jámu kopá, sám do ní padá.
- Lidé se dělí na pracovité a líné.
- Tom se nepohodl se svým bratrem a syn ho pak našel mrtvého.

Cvičení: formalizujte následující věty

- Pokud někdo lže, tak i krade.
- Je k dispozici pokoj s výhledem.
- Není všechno zlato, co se třpytí.
- Pomeranče a citróny jsou citrusové plody.
- Jen hadům a ještěrkám se dobře daří v poušti.
- Petr má krásnou ženu, ona ho však nenávidí.
- Kdo jinému jámu kopá, sám do ní padá.
- Lidé se dělí na pracovité a líné.
- Tom se nepohodl se svým bratrem a syn ho pak našel mrtvého.

Cvičení: formalizujte následující věty

- Pokud někdo lže, tak i krade.
- Je k dispozici pokoj s výhledem.
- Není všechno zlato, co se třpytí.
- Pomeranče a citróny jsou citrusové plody.
- Jen hadům a ještěrkám se dobře daří v poušti.
- Petr má krásnou ženu, ona ho však nenávidí.
- Kdo jinému jámu kopá, sám do ní padá.
- Lidé se dělí na pracovité a líné.
- Tom se nepohodl se svým bratrem a syn ho pak našel mrtvého.

Cvičení: formalizujte následující věty

- Pokud někdo lže, tak i krade.
- Je k dispozici pokoj s výhledem.
- Není všechno zlato, co se třpytí.
- Pomeranče a citróny jsou citrusové plody.
- Jen hadům a ještěrkám se dobře daří v poušti.
- Petr má krásnou ženu, ona ho však nenávidí.
- Kdo jinému jámu kopá, sám do ní padá.
- Lidé se dělí na pracovité a líné.
- Tom se nepohodl se svým bratrem a syn ho pak našel mrtvého.

Cvičení: formalizujte následující věty

- Pokud někdo lže, tak i krade.
- Je k dispozici pokoj s výhledem.
- Není všechno zlato, co se třpytí.
- Pomeranče a citróny jsou citrusové plody.
- Jen hadům a ještěrkám se dobře daří v poušti.
- Petr má krásnou ženu, ona ho však nenávidí.
- Kdo jinému jámu kopá, sám do ní padá.
- Lidé se dělí na pracovité a líné.
- Tom se nepohodl se svým bratrem a syn ho pak našel mrtvého.

Cvičení: formalizujte následující věty

- Pokud někdo lže, tak i krade.
- Je k dispozici pokoj s výhledem.
- Není všechno zlato, co se třpytí.
- Pomeranče a citróny jsou citrusové plody.
- Jen hadům a ještěrkám se dobře daří v poušti.
- Petr má krásnou ženu, ona ho však nenávidí.
- Kdo jinému jámu kopá, sám do ní padá.
- Lidé se dělí na pracovité a líné.
- Tom se nepohodl se svým bratrem a syn ho pak našel mrtvého.

Cvičení: formalizujte následující věty

- Člověk, který ovládá všechny ctnosti, je ctnostný člověk, ale jsou ctnostní lidé, kteří všechny ctnosti neovládají.
- Každý syn má otce, ale ne každý otec má syna.
- Každý, kdo má všechny rád, zná někoho, kdo nemá nikoho rád.

Pojem interpretace

Interpretace I sestává z univerza objektů U_I, což je nějaká neprázdná množina a navíc

- každému jménu přiřadí nějaký objekt univerza,
- každému jednomístnému predikátu přiřadí nějakou podmnožinu univerza,
- každému n-místnému predikátu přiřadí n-ární relaci na univerzu.

Pojem interpretace

Interpretace I sestává z univerza objektů U_I, což je nějaká neprázdná množina a navíc

- každému jménu přiřadí nějaký objekt univerza,
- každému jednomístnému predikátu přiřadí nějakou podmnožinu univerza,
- každému n-místnému predikátu přiřadí n-ární relaci na univerzu.

Pojem interpretace

Interpretace I sestává z univerza objektů U_I, což je nějaká neprázdná množina a navíc

- každému jménu přiřadí nějaký objekt univerza,
- každému jednomístnému predikátu přiřadí nějakou podmnožinu univerza,
- každému n-místnému predikátu přiřadí n-ární relaci na univerzu.

Pojem interpretace

Interpretace I sestává z univerza objektů U_I, což je nějaká neprázdná množina a navíc

- každému jménu přiřadí nějaký objekt univerza,
- každému jednomístnému predikátu přiřadí nějakou podmnožinu univerza,
- každému n-místnému predikátu přiřadí n-ární relaci na univerzu.

Valuace

Valuace V v interpretaci I je funkce, která přiřazuje každé proměnné nějaký objekt z univerza interpretace I.

Značení

$IV(t) = I(t)$, pokud t je jméno.
$IV(t) = V(t)$, pokud t je proměnná.

Tarského definice pravdy—elementární věty

Předpokládejme, že A je jednomístný predikát a t je term. Pak

$IV \models At$ ptk $IV(t) \in I(A)$.

Předpokládejme, že A je n-místný predikát. Pak

$IV \models At_1, \ldots, t_n$ ptk $\langle IV(t_1), \ldots, IV(t_n)\rangle \in I(A)$.

Tarského definice pravdy—výrokové operátory

- *IV* $\models \neg\varphi$ ptk není pravda, že *IV* $\models \varphi$.
- *IV* $\models \varphi \wedge \psi$ ptk *IV* $\models \varphi$ a *IV* $\models \psi$.
- *IV* $\models \varphi \vee \psi$ ptk *IV* $\models \varphi$ nebo *IV* $\models \psi$.
- *IV* $\models \varphi \rightarrow \psi$ ptk není pravda, že *IV* $\models \varphi$ nebo platí, že *IV* $\models \psi$.
- *IV* $\models \varphi \leftrightarrow \psi$ ptk *IV* $\models \varphi$ právě tehdy, když *IV* $\models \psi$

Kvantifikátory: Substituční strategie

- $IV \models \forall x\varphi$ ptk pro každé jméno a platí $IV \models \varphi^x_a$.
- $IV \models \exists x\varphi$ ptk pro nějaké jméno a platí $IV \models \varphi^x_a$.

Varianta valuace

Předpokládejme, že V je valuace v interpretaci I, o je nějaký objekt z univerza interpretace I, x je proměnná. V_o^x je tzv. x-varianta valuace V, kterou definujeme následujícím způsobem:

$V_o^x(y) = V(y)$, pro každou proměnnou y, která se liší od x.

$V_o^x(x) = o$.

Tarského definice pravdy—kvantifikátory

- $IV \models \forall x \varphi$ ptk pro každé $o \in U_I$ platí $IV^x_o \models \varphi$.
- $IV \models \exists x \varphi$ ptk pro nějaké $o \in U_I$ platí $IV^x_o \models \varphi$.

Platnost formule v interpretaci

Definice

$I \models \varphi$ ptk pro každé V v I platí $IV \models \varphi$.

Věta o platnosti sentencí v interpretaci

Předpokládejme, že I je interpretace a φ je sentence. Pak platí:

Buď $I \models \varphi$, nebo $I \models \neg\varphi$.

Model a kontra-model formule, model množiny formulí

Definice

Interpretace I je modelem formule φ p.t.k. $I \models \varphi$. Interpretace I je kontra-modelem formule φ p.t.k. I není modelem formule φ. Interpretace I je modelem množiny formulí p.t.k. I je modelem každé formule z této množiny.

Pojem vyplývání

Definice

Závěr vyplývá z předpokladů, když každý model předpokladů je modelem závěru.
(Ekvivalentně: Neexistuje model předpokladů, který by současně byl kontra-modelem závěru.)
Značíme: $T \models \varphi$.

Příklady

Platí $\exists x \forall y Rxy \models \forall y \exists x Rxy$

Neplatí $\forall y \exists x Rxy \models \exists x \forall y Rxy$

Platný úsudek: Existuje příčina všech jevů. Z toho plyne, že každý jev má nějakou příčinu.

Neplatný úsudek: Každý jev má nějakou příčinu. Z toho plyne, že existuje příčina všech jevů.

Příklady

Platí $\exists x \forall y Rxy \models \forall y \exists x Rxy$

Neplatí $\forall y \exists x Rxy \models \exists x \forall y Rxy$

Platný úsudek: Existuje příčina všech jevů. Z toho plyne, že každý jev má nějakou příčinu.

Neplatný úsudek: Každý jev má nějakou příčinu. Z toho plyne, že existuje příčina všech jevů.

Příklady

Platí $\exists x \forall y Rxy \models \forall y \exists x Rxy$

Neplatí $\forall y \exists x Rxy \models \exists x \forall y Rxy$

Platný úsudek: Existuje příčina všech jevů. Z toho plyne, že každý jev má nějakou příčinu.

Neplatný úsudek: Každý jev má nějakou příčinu. Z toho plyne, že existuje příčina všech jevů.

Příklady

Platí $\exists x \forall y Rxy \models \forall y \exists x Rxy$

Neplatí $\forall y \exists x Rxy \models \exists x \forall y Rxy$

Platný úsudek: Existuje příčina všech jevů. Z toho plyne, že každý jev má nějakou příčinu.

Neplatný úsudek: Každý jev má nějakou příčinu. Z toho plyne, že existuje příčina všech jevů.

Logická ekvivalence

φ, ψ jsou logicky ekvivalentní formule, když $\varphi \models \psi$ a $\psi \models \varphi$.

Vztahy mezi kvantifikátory

- $\neg\forall x\varphi$ je log. ek. s $\exists x\neg\varphi$.
- $\neg\exists x\varphi$ je log. ek. s $\forall x\neg\varphi$.
- $\exists x\varphi$ je log. ek. s $\neg\forall x\neg\varphi$.
- $\forall x\varphi$ je log. ek. s $\neg\exists x\neg\varphi$.

Další sémantické pojmy

- Sentence je logicky pravdivá, když je v každé interpretaci pravdivá.
- Sentence je logicky nepravdivá, když není v žádné interpretaci pravdivá.
- Sentence je splnitelná, když má model.
- Množina sentencí je splnitelná, když má model.

Další sémantické pojmy

- Sentence je logicky pravdivá, když je v každé interpretaci pravdivá.
- Sentence je logicky nepravdivá, když není v žádné interpretaci pravdivá.
- Sentence je splnitelná, když má model.
- Množina sentencí je splnitelná, když má model.

Další sémantické pojmy

- Sentence je logicky pravdivá, když je v každé interpretaci pravdivá.
- Sentence je logicky nepravdivá, když není v žádné interpretaci pravdivá.
- Sentence je splnitelná, když má model.
- Množina sentencí je splnitelná, když má model.

Další sémantické pojmy

- Sentence je logicky pravdivá, když je v každé interpretaci pravdivá.
- Sentence je logicky nepravdivá, když není v žádné interpretaci pravdivá.
- Sentence je splnitelná, když má model.
- Množina sentencí je splnitelná, když má model.

Další sémantické pojmy

- Sentence je logicky pravdivá, když je v každé interpretaci pravdivá.
- Sentence je logicky nepravdivá, když není v žádné interpretaci pravdivá.
- Sentence je splnitelná, když má model.
- Množina sentencí je splnitelná, když má model.